Grebennikova I.V., Kremlev A.G. ON ASYMPTOTIC OF PROBLEM OF CONTROL FOR SINGULARLY PERTURBED SYSTEM WITH DELAY

The problem of control for the singularly perturbed delay system with the minimax criterion is considered. Procedure is proposed for construction initial approximation of control response for minimax problem of control.

Key words: singularly perturbed system with delay; optimal control; fundamental matrix.

УДК 517.9

ДИНАМИЧЕСКАЯ РЕКОНСТРУКЦИЯ ГРАНИЧНЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

© **Е.И. Грибанова**

Ключевые слова: динамическая система; граничное управление; динамическая регуляризация.

Описывается метод динамической регуляризации, применяемый для восстановления граничных управлений в гиперболической системе. Показано, что построенный алгоритм позволяет получить кусочно-равномерную сходимость регуляризованных приближений. Выполнена конечномерная аппроксимация задачи и проведено численное моделировани.

Рассматривается задача реконструкции неизвестных граничных управлений, функционирующих в гиперболической системе. Для решения задачи привлекается метод динамической регуляризации [1]. Работа продолжает исследования [2, 3].

Пусть управляемая динамическая система на конечном отрезке времени $T=[t_0,\vartheta]$ описывается гиперболической краевой задачей [4, гл. 4]

$$y_{tt} = Ay + f(t,x) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\,\frac{\partial y}{\partial x_j}\Big) - a(x)\,y + f(t,x)\,, \quad (t,x)\in Q = T\times\Omega\,;$$

$$y(t_0,x) = y_0(x)\,, \quad y_t(t_0,x) = y_1(x)\,, \quad x\in\Omega\subset\mathbb{R}^n\,;$$

$$\frac{\partial y}{\partial N} + \nu\,y = g(x)\,u(t)\,, \quad t\in T\,, \quad x\in\Gamma=\partial\Omega\,, \quad \nu=\mathrm{const}\geqslant 0\,;$$

эллиптический оператор в правой части уравнения коэрцитивен [4, гл. 3, § 3], $a_{ij}=a_{ji}\in$ $\in L_\infty(\Omega)$, $a\geqslant a_0 = const\geqslant 0$, $a\in L_\infty(\Omega)$, $f\in L_2(Q)$, $g\in L_2^m(\Gamma)$, $y_0\in L_2(\Omega)$, $y_1\in W_2^1(\Omega)^*$, управление $u\in L_2(T;\mathbb{R}^m)$, $u(t)\in P\subset\mathbb{R}^m$, $t\in T$ (P — выпуклый компакт).

Пусть в соответствующие текущие моменты времени $t\in T$ приближенно измеряются скорости системы $y_t[t]$, причем результаты этих измерений $y_t^{(\delta)}[t]$ удовлетворяют условию $\|\,y_t^{(\delta)}[t]-y_t[t]\,\|_{W_2^1(\Omega)^*}\leqslant\delta$, $0\leqslant\delta\leqslant\delta_0$. Задача восстановления состоит в том, чтобы построить динамический алгоритм $D: y_t^{(\delta)}\to u_\delta$, восстанавливающий ту реализацию u управляющего воздействия на динамическую систему, которая порождает наблюдаемое движение системы. При этом результат $u_\delta=u_\delta(t)$, $t\in T$, восстановления искомого управления $u=u(t)$, $t\in T$, должен быть тем точнее, чем меньше ошибки измерений: $u_\delta\to u$, $\delta\to 0$.

Задачу реконструкции предлагается решать модифицированным методом динамической регуляризации [1]. Решение задачи восстановления будем искать в виде семейства конечно-шаговых динамических алгоритмов $D = \{ D_\delta^\sigma :\ \sigma \in \Sigma,\ 0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0 \}$, где Σ — множество всех конечных разбиений отрезка T. Каждый алгоритм формализуется в виде тройки $D_\delta^\sigma = \big((t_i)_{i=0}^{l};\ (E_i)_{i=0}^{l-1};\ (F_i)_{i=0}^{l-1} \big)$, где $(t_i)_{i=0}^{l}$ — точки разбиения $\sigma :\ t_0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{l-1} < t_l = \vartheta$; E_i — отображение, которое позиционным способом формирует на отрезке $[t_i, t_{i+1}]$ приближение к искомому управлению; F_i — отображение, формирующее движение вспомогательной системы-модели (поводыря) на отрезке $[t_i, t_{i+1}]$.

В данной работе в качестве поводыря выберем копию исходной системы. Значение отображения $E_i(\eta, \zeta, w, \alpha, \varepsilon) = u_\delta^i$ удовлетворяет условию

$$\Phi_i^* \leqslant \Phi_i(u_\delta^i) \leqslant \Phi_i^* + \varepsilon\,(t_{i+1} - t_i)\,, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}_+,$$

где

$$\Phi_i(u) = \Phi_i(u; \eta, \zeta) = 2\,\langle\, B_\Omega(\,\eta - \zeta\,), B_\Gamma(\,g \int_{t_i}^{t_{i+1}} u(\tau) d\tau)\,\rangle_H + \alpha\, \Lambda_{t_i}^{t_{i+1}}[u]\,, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+\,;$$

$$\Phi_i^* = \Phi_i^*(w) = \min \{\, \Phi_i(u) :\ u \in U_i,\ u(t_i) = w \,\}\,, \quad \Lambda_t^\tau[u] = \int_t^\tau \|\, u(s)\,\|_{\mathbb{R}^m}^2 ds + V_t^\tau[u]\,;$$

$$B_\Omega(\,y\,) = (\,y_1, y_2, \dots\,)\,, \quad y_j = \langle\, y, \omega_j\,\rangle_*\,, \quad j \in \mathbb{N}\,, \quad y \in W_2^1(\Omega)^*\,;$$

$$B_\Gamma(\,g\,v\,) = (\,g^{(1)}v,\ g^{(2)}v, \dots\,)\,,\ g^{(j)} = \big(\,\langle\, g_1, \omega_j\,\rangle_{L_2(\Gamma)}, \dots, \langle\, g_m, \omega_j\,\rangle_{L_2(\Gamma)}\,\big)\,,\ g \in L_2^m(\Gamma)\,,\ v \in \mathbb{R}^m\,;$$

$V_t^\tau[u]$ — полная вариация функции u на отрезке $[t, \tau]$; $\langle\, y, \omega\,\rangle_*$ — значение функционала y на элементе ω; $\{\, \lambda_j, \omega_j :\ j \in \mathbb{N}\,\}$ — решение в $W_2^1(\Omega)$ спектральной задачи

$$A\,\omega = -\lambda\,\omega \ \text{ в } \ \Omega\,, \quad \partial\omega/\partial N + \nu\,\omega = 0 \ \text{ на } \ \Gamma\,, \quad \langle\, \omega, \omega\,\rangle_{L_2(\Omega)} = 1\,;$$

H — гильбертово пространство числовых последовательностей со скалярным произведением $\langle\, q^{(1)},\, q^{(2)} \rangle_H = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \beta_j\, q_j^{(1)}\, q_j^{(2)}$ и нормой $\|\, q\,\|_H = \langle\, q,\ q\,\rangle_H^{1/2}$, при этом считается, что числа β_j удовлетворяют условиям $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \beta_j < \infty$, $\beta_j \in (0,1)$, $0 < \beta_j\, \lambda_j \leqslant 1$, $j \in \mathbb{N}$.

Пусть $\mu : T \to \mathbb{R}_+$ обозначает модуль непрерывности семейства всех решений управляемой динамической системы, соответствующих всем допустимым управлениям и рассматриваемых как отображения $(y[\cdot], y_t[\cdot]) : T \to L_2(\Omega) \times W_2^1(\Omega)^*$ (он существует и конечен).

Работа алгоритма и формирование его реализации подробно описаны в [1, 2].

Т е о р е м а. *Пусть среди управлений, порождающих наблюдаемое движение динамической системы* y, *существует управление* $\widehat{u}$, *минимизирующее на этих управлениях функционал* $\Lambda_{t_0}^{\vartheta}[\,\cdot\,]$. *Пусть параметры регуляризации* $\alpha = \alpha(\delta)$, $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$, $\varphi = \varphi(\delta) = diam(\sigma(\delta))$ *и модуль непреврыности* $\mu = \mu(\delta)$ *удовлетворяют условиям:* $\alpha(\delta) \to 0$, $\varepsilon(\delta) \to 0$, $\varphi(\delta) \to 0$, $(\,\varepsilon(\delta) + \delta + \mu(\delta)\,)\,\alpha(\delta)^{-1} \to 0$ *при* $\delta \to 0$. *Тогда семейство алгоритмов* D *решает задачу восстановления на наблюдаемом движении* y. *Какие бы ни случились допустимые реализации измерений* $y_t^{(\delta)}$, *для реализаций алгоритма* u_δ *имеют место следующие сходимости:* $u_\delta \to \widehat{u}$ *сильно в* $L_2(T; \mathbb{R}^m)$; $u_\delta(t) \to \widehat{u}(t)$ *в* $\mathbb{R}^m$ *поточечно на* T; $u_\delta(t) \to \widehat{u}(t)$ *в* $\mathbb{R}^m$ *равномерно по* t *на любом отрезке, не содержащем точек разрыва функции* $\widehat{u}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М.* Основы метода динамической регуляризации. М.: Изд-во МГУ, 1999. 237 с.

2. *Короткий М.А.* Восстановление управлений статическим и динамическим методами регуляризации с негладкими стабилизаторами // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73. Вып. 1. С. 39-53.
3. *Короткий А.И., Грибанова Е.И.* Восстановление граничных управлений в гиперболических системах // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18. № 2 С. 154-169.
4. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена по программе АВЦП 1.994.2011 «Устойчивые вычислительные методы анализа динамики сложных систем», поддержана молодежным грантом ИММ УрО РАН и поддержана РФФИ (проект № 11-01-00073).

Gribanova E.I. DYNAMIC RECONSTRUCTION OF BOUNDARY CONTROLS IN HYPERBOLIC SYSTEMS

The method of dynamic regularization applied to restore the boundary controls in the hyperbolic system is described. It is shown that the constructed algorithm can get piecewise-uniform convergence of the regularized approximations. Finite-dimensional approximation of the problem is performed and numerical modeling are realized.

Key words: dynamical systems; boundary control; dynamic regularization.

УДК 517.962.2

ОБ ОДНОМ ПРИЗНАКЕ УСТОЙЧИВОСТИ В ДИСКРЕТНОМ СМЫСЛЕ

© Т.С. Грязнова

Ключевые слова: теория неотрицательных матриц; детерминантный критерий Мецлера.

Предлагается признак устойчивости, основанный на детерминантном критерии Мецлера.

Пусть $\mathbf{A} = (a_{ij})$ — вещественная или комплексная квадратная $n \times n$-матрица. Она называется *в дискретном смысле: матрицей Гурвица* или *гурвицевой матрицей*, если

$$|\mathbf{A}^k| \to 0 \text{ при } k \to +\propto; \tag{1}$$

матрицей Ляпунова или *ляпуновской матрицей*, если

$$|\mathbf{A}^k| \leqslant \mathbf{C} \text{ при } k = 0, 1, 2, \ldots; \tag{2}$$

матрицей Дирихле, если она невырожденная, $det\mathbf{A} \neq 0$, и

$$|\mathbf{A}^k| \leqslant \mathbf{C} \text{ при } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Здесь $|\mathbf{A}| = (|a_{ij}|)$; $\mathbf{C}$ — некоторая постоянная неотрицательная матрица, а неравенство понимается поэлементно [1, глава 13].

В сообщении [2] указан признак устойчивости, когда имеет место свойство (1) (в [2] применяется обобщение критерия Мецлера [3, с. 335, упр. 1] на произвольные матрицы)

$$(\mathbf{I} - |\mathbf{A}|)\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_p \\ i_1 & \ldots & i_p \end{pmatrix} > 0, 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n, p = 1, 2, \ldots, n,$$